SSH 生徒研究発表会

今年度の SSH 生徒研究発表会は COVID-19 の感染拡大にともないオンライン上で行なわれました。各高校の代表者が研究成果をオンライン上で発表する中、桑名高校も数学研究班が「連分数表記から考える虚数」についてポスター発表を行ないました。

連分数（continued fraction）とは、分母に更に分数が含まれているような分数のことで、特に分子がすべて 1 であるようなものを正則連分数といいます。はじめに、 $\frac{3}{2}$ を例にして正則連分数の表し方をみてみましょう。

① $\frac{3}{2}$ を超えない最大の整数と分数の和で表し直します。このとき分数部分は分子が 1 となるよう表します。

$$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$$

②新しく出来た分数部分の分母が整数でないとき①の操作を繰り返します。今は分母 2 で整数のため終了です。

次に $\frac{5}{3}$ みてみましょう。

$$\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}$$ ←①の操作より

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$ ←新しく出来た分数部分 $\frac{3}{2}$ に①の操作をした

問題

$\frac{8}{5}$ を正則連分数で表せ。

（答は裏面）

無理数を連分数で表すと無限に分数が続きます。

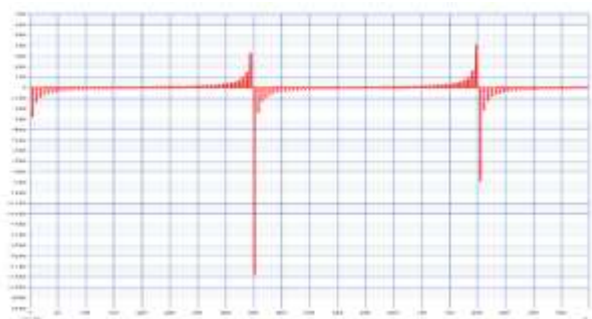
$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}},\quad \sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

二次方程式の解も連分数で展開することが出来ます。

$$x^2+x-1=0 \iff \mathrm{x}(1+\mathrm{x})=1 \qquad \Rightarrow \mathrm{x}=\frac{1}{1+x}$$

$$\therefore\ \mathrm{x}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}$$

数学班は 2 次方程式の解が連分数で展開できることから、虚数解を持つ場合について考察を与えました。結果、虚数解の連分数展開に周期性があることを、数列を考えることとグラフ化することで見いだしました。



n	1	2	⋯	404	405	406	⋯
$\tan n\theta$	$\tan\theta$	$\tan 2\theta$	⋯	$\tan 404\theta$	$\tan 405\theta$ $\fallingdotseq \tan\theta$	$\tan 406\theta$ $\fallingdotseq \tan 2\theta$	⋯

三重県立
桑名高等学校
発行元：SSH 部
発行日：2020/09/09